

# UNA FORMULACIÓN NUMÉRICA GENERAL PARA EL CÁLCULO Y DISEÑO DE TOMAS DE TIERRA EN GRANDES INSTALACIONES ELÉCTRICAS

IGNASI COLOMINAS  
FERMÍN NAVARRINA  
y  
MANUEL CASTELEIRO

*Departamento de Métodos Matemáticos y de Representación  
E.T.S de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad de La Coruña  
Campus de Elviña, 15192 La Coruña, España  
Tel.: + 34-81-16 7000; Fax: + 34-81-16 7170  
E-mail: colominas@etsicpc.udc.es; navarrina@etsicpc.udc.es; casteleiro@udc.es*

## RESUMEN

La puesta a tierra de una instalación eléctrica es imprescindible para garantizar su seguridad cuando tienen lugar situaciones de fallo. Para su correcto análisis y diseño se requiere la determinación de una serie de magnitudes tales como el cálculo de la resistencia equivalente de la toma de tierra y la distribución del potencial originado en la superficie del terreno como consecuencia de una derivación de corriente al mismo<sup>1,2</sup>. Tradicionalmente, los estudios sobre el cálculo de tomas de tierra se han planteado con el fin de obtener fórmulas sencillas y rápidas (a partir de mediciones experimentales en modelos de laboratorio o como resultado de la experiencia acumulada por los técnicos y profesionales que han trabajado en su proyecto y diseño) que permitan la estimación de estos parámetros característicos. Desde mediados de los años setenta se han desarrollado nuevos métodos basados en técnicas de cálculo matricial que intentan ponderar el efecto de los segmentos en que se subdividen los electrodos de la toma de tierra, a partir de algunas hipótesis básicas y simplificaciones poco justificadas, cuando no cuestionables<sup>3,4</sup>. A pesar del importante avance que han representado estas técnicas, se han puesto de manifiesto algunas anomalías notables en su aplicación práctica, tales como sus elevados requerimientos computacionales, los resultados poco realistas que se obtienen al aumentar la segmentación de los conductores y la incertidumbre en su margen de error<sup>4</sup>.

En este artículo se presenta una formulación numérica general basada en el método de elementos de contorno para el cálculo y diseño asistido por ordenador de tomas de tierra, aplicable a un amplio rango de instalaciones eléctricas reales. Esta formulación incluye como casos particulares a los métodos intuitivos utilizados en la actualidad que se obtienen al introducir una serie de hipótesis en la formulación general de elementos de contorno con el fin de reducir su coste computacional. Por otra parte, la utilización de elementos de densidad de corriente lineal y parabólica permite aumentar considerablemente la precisión de los resultados. La introducción de una novedosa técnica de integración analítica, combinada con métodos semi-iterativos de resolución de los sistemas de ecuaciones involucrados, ha permitido reducir drásticamente los requerimientos computacionales de la formulación numérica desarrollada, a partir de la cual es posible además obtener implementaciones más eficaces.

Recibido: Marzo 1997

Finalmente, esta formulación de elementos de contorno se ha implementado en un sistema de Diseño Asistido por Ordenador de tomas de tierra de subestaciones eléctricas desarrollado por los autores en los últimos años, con el que es posible obtener resultados de gran precisión y fiabilidad con unos costes computacionales reducidos. La viabilidad y eficacia de la técnica desarrollada se demuestra mediante su aplicación a dos ejemplos reales.

## A GENERAL NUMERICAL FORMULATION FOR THE COMPUTING AND DESIGN OF GROUNDING GRIDS IN ELECTRICAL INSTALLATIONS

### SUMMARY

Analysis and design of substation earthing involves computing the equivalent resistance of grounding systems, as well as distribution of potentials on the earth surface due to fault currents<sup>1,2</sup>. While very crude approximations were traditionally available, several methods have been proposed in the last two decades, most of them on the basis of intuitive ideas such as superposition of punctual current sources and error averaging<sup>3,4</sup>. Although these techniques represented a significant improvement in the area of earthing analysis, a number of problems have been reported; namely: large computational requirements, unrealistic results when segmentation of conductors is increased, and uncertainty in the margin of error<sup>4</sup>.

A Boundary Element approach for the numerical computation of substation grounding systems is presented in this paper. Several widespread intuitive methods (such as the Average Potential Method) can be identified in this general formulation as the result of suitable assumptions introduced in the BEM formulation to reduce computational cost for specific choices of the test and trial functions. On the other hand, this general approach allows to use linear and parabolic leakage current elements to increase accuracy. Efforts have been particularly made in getting a drastical reduction in computing time by means of new completely analytical integration techniques, while semi-iterative methods have proved to be specially efficient for solving the involved system of linear equations.

Finally, this BEM formulation has been implemented in a specific Computer Aided Design system for grounding analysis developed within the last years. The feasibility of this approach is finally demonstrated by means of its application to two real problems.

## INTRODUCCIÓN

### Modelo Matemático del Problema

Los objetivos de un sistema de toma de tierra son garantizar la integridad de los equipos y la continuidad del suministro eléctrico cuando tienen lugar situaciones de fallo permitiendo el transporte y disipación de la corriente eléctrica en el terreno y evitar que las personas que se encuentren transitando o trabajando en las inmediaciones de una instalación conectada a tierra estén expuestas a una descarga eléctrica peligrosa. Para ello, la resistencia equivalente de la toma de tierra deberá ser lo suficientemente baja para garantizar la disipación de las corrientes de pérdida en el terreno principalmente a través de la malla de electrodos, mientras que las máximas diferencias de potencial entre puntos próximos de la superficie del terreno y la instalación deberán ser inferiores a determinadas tolerancias (tensiones de paso, de malla y de contacto)<sup>1,2</sup>.

El problema asociado a la disipación de corriente eléctrica en el suelo se puede modelizar mediante la Teoría del Electromagnetismo de Maxwell<sup>5</sup>. Así, si se limita

el estudio a la obtención de la respuesta electrocinética en estado estacionario<sup>1,6</sup> y se desprecia la resistencia eléctrica interna de la toma de tierra (formada por una malla de electrodos interconectados, enterrada a una determinada profundidad), las ecuaciones que rigen la derivación de corriente pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\sigma) &= 0, & \sigma &= -\gamma \operatorname{grad}(V) \quad \text{en } E \\ V &= V_{\Gamma} \quad \text{en } \Gamma, & \mathbf{n}_E \cdot \sigma &= 0 \quad \text{en } \Gamma_E \end{aligned} \quad (1)$$

siendo  $E$  el terreno,  $\gamma$  su tensor de conductividad,  $\Gamma_E$  la superficie del terreno,  $\mathbf{n}_E$  su versor normal exterior y  $\Gamma$  la superficie de los electrodos<sup>7,8</sup>. Las soluciones de este problema son el potencial  $V$  y la densidad de corriente  $\sigma$  en un punto arbitrario  $\mathbf{x}$  cuando la toma de tierra adquiere un potencial  $V_{\Gamma}$  (Sobretensión de Tierra), que en lo sucesivo se considerará unitario ( $V_{\Gamma} = 1$ ) sin pérdida de generalidad, dado que  $V$  y  $\sigma$  son proporcionales al valor de  $V_{\Gamma}$ .

En estos términos, siendo  $\mathbf{n}$  el versor normal exterior a  $\Gamma$ , la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$  que emana de un punto arbitrario de la superficie de los electrodos, la intensidad total de corriente que emana de la toma de tierra  $I_{\Gamma}$  y la resistencia equivalente del sistema electrodo-terreno  $R_{eq}$  pueden escribirse como

$$\sigma = \sigma^t \mathbf{n}, \quad I_{\Gamma} = \int \int_{\Gamma} \sigma \, d\Gamma, \quad R_{eq} = \frac{V_{\Gamma}}{I_{\Gamma}} \quad (2)$$

En la práctica, la hipótesis de terreno homogéneo e isótropo se puede considerar aceptable<sup>2</sup>, por lo que el tensor  $\gamma$  se puede sustituir por una conductividad escalar aparente  $\gamma$  que se determina experimentalmente. En el caso más general se considera que un modelo multi-capa permite representar aceptablemente la respuesta del terreno<sup>2</sup>. Puesto que las técnicas que se exponen en este trabajo pueden generalizarse a modelos multi-capa<sup>9,20</sup> (que representan el terreno estratificado en dos o más capas de diferente espesor, cada una caracterizada con un valor distinto de la conductividad escalar  $\gamma$ ), el desarrollo y ejemplos que se presentarán en lo sucesivo se restringen a modelos de terreno uniformes. Así, el problema (1) se reduce a la ecuación de Laplace con condiciones de contorno mixtas<sup>5</sup>.

Por otra parte, si se asume que la superficie del terreno es horizontal, la simetría (método de las imágenes) permite reescribir el problema (1) en términos del Problema Exterior de Dirichlet

$$\begin{aligned} \Delta V &= 0 \quad \text{en } E \\ V &= V_{\Gamma} \quad \text{en } \Gamma \text{ y } \Gamma' \end{aligned} \quad (3)$$

donde la superficie imagen  $\Gamma'$  es la simétrica de  $\Gamma$  respecto de la superficie del terreno<sup>7,8</sup>. Esta hipótesis de superficie horizontal es bastante adecuada dado que, en la práctica, el terreno en el que se construye una instalación eléctrica y sus alrededores se regularizan previamente a la colocación de los equipos y ejecución de los viales y zonas de servicios.

## PLANTEAMIENTO VARIACIONAL DEL PROBLEMA

En la mayoría de las instalaciones eléctricas, la toma de tierra está formada por una malla de conductores cilíndricos interconectados, enterrados horizontalmente o bien hincados verticalmente, cuya relación diámetro/longitud suele ser relativamente pequeña ( $\sim 10^{-3}$ ). Obviamente, en la práctica no es posible la obtención de soluciones analíticas a este tipo de problemas. Por otra parte, el empleo de técnicas numéricas estándar (Elementos Finitos o Diferencias Finitas<sup>11</sup>) requiere la discretización del dominio  $E$ , lo que implica unas necesidades computacionales prohibitivas tanto en memoria como en tiempo de CPU.

Sin embargo, dado que en el diseño de una toma de tierra el cálculo del potencial tan sólo es preciso en la superficie del terreno  $\Gamma_E$  y que la resistencia equivalente se obtiene fácilmente (2) a partir de la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$ , se ha optado por desarrollar una formulación basada en el Método de Elementos de Contorno que únicamente requiere la discretización de la superficie de los electrodos  $\Gamma$  y permite reducir el problema tridimensional a un problema bidimensional.

La aplicación de la Identidad de Green<sup>12,13</sup> a (1) permite obtener la siguiente expresión integral para el potencial  $V$  en  $E$ , en términos de la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$

$$V(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\xi \in \Gamma} k(\mathbf{x}, \xi) \sigma(\xi) d\Gamma, \quad \mathbf{x} \in E \quad (4)$$

siendo el núcleo débilmente singular

$$k(\mathbf{x}, \xi) = \left( \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} + \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi')} \right), \quad r(\mathbf{x}, \xi) = |\mathbf{x} - \xi| \quad (5)$$

donde  $\xi'$  es el punto simétrico de  $\xi$  con respecto a la superficie del terreno<sup>7,8</sup>.

Dado que (4) se verifica también sobre la superficie de los electrodos  $\Gamma^8$  y el potencial en dicho contorno viene dado por la Sobretensión de Tierra ( $V(\chi) = 1$ ,  $\chi \in \Gamma$ ), la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$  debe satisfacer la ecuación integral de Fredholm de primera clase definida en  $\Gamma$

$$1 = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\xi \in \Gamma} k(\chi, \xi) \sigma(\xi) d\Gamma, \quad \chi \in \Gamma \quad (6)$$

Finalmente, la expresión anterior puede escribirse en la forma variacional más débil<sup>10</sup>

$$\int \int_{\chi \in \Gamma} w(\chi) \left[ 1 - \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\xi \in \Gamma} k(\chi, \xi) \sigma(\xi) d\Gamma \right] d\Gamma = 0 \quad (7)$$

que debe verificarse para todos los miembros  $w(\chi)$  de una determinada clase de funciones de test en  $\Gamma$ .

Obviamente, una formulación de Elementos de Contorno parece ser la mejor elección para la resolución de la forma variacional (7).

### Formulación en Elementos de Contorno

Dadas  $\mathcal{N}$  funciones de prueba  $\{N_i(\xi)\}$  definidas en  $\Gamma$  y dados  $\mathcal{M}$  elementos 2D de contorno  $\{\Gamma^\alpha\}$ , la densidad de corriente de pérdida  $\sigma$  y la superficie de la toma de tierra  $\Gamma$  se pueden discretizar en la forma

$$\sigma(\xi) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i N_i(\xi), \quad \Gamma = \bigcup_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} \Gamma^\alpha \quad (8)$$

y la expresión (4) puede aproximarse por

$$V(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\mathcal{N}} \sigma_i V_i(\mathbf{x}), \quad V_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} V_i^\alpha(\mathbf{x}) \quad (9)$$

$$V_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\xi \in \Gamma^\alpha} k(\mathbf{x}, \xi) N_i(\xi) d\Gamma^\alpha \quad (10)$$

Finalmente, para un conjunto dado de  $\mathcal{N}$  funciones de test  $\{w_j(\chi)\}$  definidas en  $\Gamma$ , la forma variacional (7) se reduce al sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{i=1}^{\mathcal{N}} R_{ji} \sigma_i = \nu_j, \quad j = 1, \dots, \mathcal{N} \quad (11)$$

$$R_{ji} = \sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \sum_{\alpha=1}^{\mathcal{M}} R_{ji}^{\beta\alpha}, \quad \nu_j = \sum_{\beta=1}^{\mathcal{M}} \nu_j^\beta \quad (12)$$

$$R_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int \int_{\chi \in \Gamma^\beta} w_j(\chi) \int \int_{\xi \in \Gamma^\alpha} k(\chi, \xi) N_i(\xi) d\Gamma^\alpha d\Gamma^\beta \quad (13)$$

$$\nu_j^\beta = \int \int_{\chi \in \Gamma^\beta} w_j(\chi) d\Gamma^\beta \quad (14)$$

Sin embargo, es obvio que las discretizaciones 2D requeridas para resolver estas ecuaciones en problemas reales obligarían a manipular un número extremadamente alto de grados de libertad, ya que los sistemas de toma de tierra están formados en la práctica por mallas de varios cientos de conductores cilíndricos de gran longitud en relación con su diámetro. Por ello y teniendo en cuenta que la matriz de coeficientes en (11) es llena y que la integración 2D en (13) debe efectuarse dos veces sobre la superficie de cada uno de los electrodos, se justifica inmediatamente la necesidad de introducir algunas simplificaciones adicionales con el fin de reducir el extremadamente elevado coste computacional del problema.

## PLANTEAMIENTO VARIACIONAL 1D APROXIMADO

Con este objetivo y considerando la geometría específica de las mallas de toma de tierra en la mayoría de las instalaciones eléctricas reales, puede asumirse que la densidad de corriente es constante en la sección transversal del electrodo cilíndrico<sup>7,8</sup>. Esta hipótesis de uniformidad circunferencial es ampliamente empleada en la mayor parte de los estudios teóricos y procedimientos prácticos recogidos en la bibliografía<sup>1,2,4</sup>.

Así, si se denomina  $L$  al conjunto completo de los ejes de los conductores enterrados,  $\hat{\xi} \in L$  a la proyección ortogonal sobre el eje de un punto genérico  $\xi \in \Gamma$ ,  $\phi(\hat{\xi})$  al diámetro del conductor,  $C(\hat{\xi})$  al perímetro circunferencial de la sección transversal y  $\hat{\sigma}(\hat{\xi})$  a la densidad de corriente aproximada que emana en esa sección transversal (asumida uniforme), se puede obtener una expresión aproximada del potencial (4) de la forma

$$\hat{V}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\hat{\xi} \in L} \left[ \int_{\xi \in C(\hat{\xi})} k(\mathbf{x}, \xi) dC \right] \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL \quad (15)$$

Sin embargo, debido a que la densidad de corriente que emana no es realmente uniforme en la sección transversal, con carácter general la expresión anterior no satisface estrictamente la condición de contorno  $\hat{V}(\chi) = V_\Gamma = 1$ ,  $\chi \in \Gamma$ , ni la forma variacional (7). No obstante, si se restringe la clase de funciones de test a aquellas con uniformidad circunferencial, es decir  $w(\chi) = \hat{w}(\hat{\chi}) \forall \chi \in C(\hat{\chi})$ , la expresión (7) se reduce a

$$\int_{\hat{\chi} \in L} \hat{w}(\hat{\chi}) \left[ \pi\phi(\hat{\chi}) - \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\hat{\xi} \in L} K(\hat{\chi}, \hat{\xi}) \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL \right] dL = 0 \quad (16)$$

que debe satisfacerse para todos los miembros  $\hat{w}(\hat{\chi})$  de una determinada clase de funciones de test en  $L$ , siendo el núcleo integral

$$K(\hat{\chi}, \hat{\xi}) = \int_{\chi \in C(\hat{\chi})} \left[ \int_{\xi \in C(\hat{\xi})} k(\chi, \xi) dC \right] dC \quad (17)$$

De este modo se impone que la condición de contorno se satisfaga en promedio en la sección transversal. De hecho, (16) puede considerarse como una forma variacional más débil de la ecuación integral de Fredholm de primera especie en  $L$

$$\pi\phi(\hat{\chi}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\hat{\xi} \in L} K(\hat{\chi}, \hat{\xi}) \hat{\sigma}(\hat{\xi}) dL \quad \forall \hat{\chi} \in L \quad (18)$$

En esta formulación no se han tenido en cuenta ni los extremos ni las uniones de los conductores, por lo que es de esperar la aparición de ligeras anomalías localizadas en esos puntos, aunque los resultados globales no deberían sufrir perturbaciones significativas en la resolución de problemas reales.

### Formulación en Elementos 1D de Contorno

La resolución de la ecuación integral (16) requiere la discretización del dominio formado por el conjunto completo de los ejes de los conductores enterrados  $L$ . Así, dadas  $n$  funciones de prueba  $\{\hat{N}_i(\hat{\xi})\}$  definidas en  $L$  y  $m$  elementos 1D de contorno  $\{L^\alpha\}$ , la densidad de corriente de pérdida  $\hat{\sigma}$  y el conjunto de ejes de los conductores  $L$  se pueden discretizar en la forma

$$\hat{\sigma}(\hat{\xi}) = \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i \hat{N}_i(\hat{\xi}), \quad L = \bigcup_{\alpha=1}^m L^\alpha \quad (19)$$

y una versión discretizada de (15) puede escribirse como

$$\hat{V}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \hat{\sigma}_i \hat{V}_i(\mathbf{x}), \quad \hat{V}_i(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^m \hat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) \quad (20)$$

$$\hat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\hat{\xi} \in L^\alpha} \left[ \int_{\xi \in C(\hat{\xi})} k(\mathbf{x}, \xi) dC \right] \hat{N}_i(\hat{\xi}) dL \quad (21)$$

Finalmente, para una elección adecuada de  $n$  funciones de test  $\{\hat{w}_j(\hat{\chi})\}$  definidas en  $L$ , la ecuación (16) se reduce al sistema de ecuaciones lineales

$$\sum_{i=1}^n \hat{R}_{ji} \hat{\sigma}_i = \hat{v}_j, \quad j = 1, \dots, n \quad (22)$$

$$\hat{R}_{ji} = \sum_{\beta=1}^m \sum_{\alpha=1}^m \hat{R}_{ji}^{\beta\alpha}, \quad \hat{v}_j = \sum_{\beta=1}^m \hat{v}_j^\beta \quad (23)$$

$$\hat{R}_{ji}^{\beta\alpha} = \frac{1}{4\pi\gamma} \int_{\hat{\chi} \in L^\beta} \hat{w}_j(\hat{\chi}) \left[ \int_{\hat{\xi} \in L^\alpha} K(\hat{\chi}, \hat{\xi}) \hat{N}_i(\hat{\xi}) dL \right] dL \quad (24)$$

$$\hat{v}_j^\beta = \int_{\hat{\chi} \in L^\beta} \pi \phi(\hat{\chi}) \hat{w}_j(\hat{\chi}) dL \quad (25)$$

En general, en comparación con la formulación 2D presentada anteriormente, el esfuerzo computacional requerido para resolver problemas reales se reduce drásticamente con esta formulación 1D, dado que tanto el tamaño del sistema de ecuaciones lineales (22), como el número de contribuciones (24) que es preciso calcular son significativamente más pequeños que los de (11) y (13).

Sin embargo, en el caso de problemas reales, el coste computacional requerido para la integración es todavía considerablemente elevado, debido a las integrales circunferenciales (17) y (21) que es preciso evaluar. Por esta razón, se hace necesario introducir nuevamente ciertas simplificaciones para reducir los tiempos de cálculo a niveles aceptables<sup>8</sup>.

### Formulación en Elementos de Contorno 1D Simplificada

La integral circunferencial del núcleo  $k(\mathbf{x}, \xi)$  de (21) se puede escribir como

$$\int_{\xi \in C(\hat{\xi})} k(\mathbf{x}, \xi) dC = \int_{\xi \in C(\hat{\xi})} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi)} dC + \int_{\xi \in C(\hat{\xi})} \frac{1}{r(\mathbf{x}, \xi')} dC \quad (26)$$

La distancia  $r(\mathbf{x}, \xi)$  entre un punto  $\mathbf{x}$  del dominio y un punto arbitrario  $\xi$  situado en el contorno del electrodo se puede expresar en la forma

$$r(\mathbf{x}, \xi) = \sqrt{|\mathbf{x} - \hat{\xi}|^2 + \frac{\phi^2(\hat{\xi})}{4} - |\mathbf{x} - \hat{\xi}| \phi(\hat{\xi}) \sin \omega \cos \theta} \quad (27)$$

donde  $\theta$  es la posición angular en el perímetro de la sección transversal del electrodo cilíndrico y

$$\sin \omega = \frac{|(\hat{\xi} - \mathbf{x}) \times \hat{s}(\hat{\xi})|}{|\hat{\xi} - \mathbf{x}|} \quad (28)$$

como muestra la Figura 1.

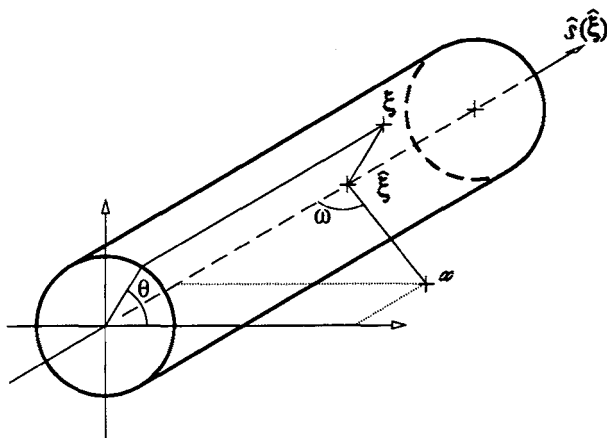


Figura 1. Distancia entre un punto dado  $\mathbf{x}$  y un punto arbitrario  $\xi$  de la superficie del electrodo

La integral elíptica obtenida cuando  $r(\mathbf{x}, \xi)$  de (27) se sustituye en (26) se puede aproximar por integración numérica hasta un nivel arbitrario de precisión. Sin embargo, dado que nos interesa calcular los potenciales en puntos  $\mathbf{x}$  de la superficie del terreno, cuya distancia a los puntos arbitrarios  $\hat{\xi}$  situados en los ejes es mucho mayor que el diámetro  $\phi(\hat{\xi})$  de los electrodos que forman la malla de tierra<sup>8</sup>, la distancia  $r(\mathbf{x}, \xi)$  de (27) se puede aproximar como

$$r(\mathbf{x}, \xi) \approx \hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\xi}) = \sqrt{|\mathbf{x} - \hat{\xi}|^2 + \frac{\phi^2(\hat{\xi})}{4}} \quad (29)$$



De este modo, la integral circunferencial del núcleo  $k(\mathbf{x}, \xi)$  de (26) resulta

$$\int_{\xi \in C(\hat{\xi})} k(\mathbf{x}, \xi) dC \approx \pi \phi(\hat{\xi}) \hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\xi}) \quad (30)$$

donde

$$\hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\xi}) = \left( \frac{1}{\hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\xi})} + \frac{1}{\hat{r}(\mathbf{x}, \hat{\xi}')} \right) \quad (31)$$

y  $\hat{\xi}'$  es el punto simétrico de  $\hat{\xi}$  con respecto a la superficie del terreno. La expresión (30) puede interpretarse como el resultado de integrar la expresión (26) mediante una cuadratura de Newton-Cotes con un solo punto. Esta aproximación es suficientemente precisa a menos que la distancia entre los puntos  $\mathbf{x}$  y  $\hat{\xi}$  sea del mismo orden de magnitud que el diámetro  $\phi(\hat{\xi})$ , lo que no ocurrirá en la práctica al emplear esta aproximación para calcular los valores del potencial en la superficie del terreno.

Si ahora se sustituye la expresión (30) en (17), se puede obtener la aproximación

$$K(\hat{\chi}, \hat{\xi}) \approx \int_{\chi \in C(\hat{\chi})} \pi \phi(\hat{\xi}) \hat{k}(\chi, \hat{\xi}) dC \quad (32)$$

y, teniendo en cuenta las aproximaciones empleadas en (29), el núcleo integral (17) se puede simplificar en la forma

$$K(\hat{\chi}, \hat{\xi}) \approx \pi \phi(\hat{\xi}) \pi \phi(\hat{\chi}) \hat{\hat{k}}(\hat{\chi}, \hat{\xi}) \quad (33)$$

siendo

$$\hat{\hat{k}}(\hat{\chi}, \hat{\xi}) = \left( \frac{1}{\hat{\hat{r}}(\hat{\chi}, \hat{\xi})} + \frac{1}{\hat{\hat{r}}(\hat{\chi}, \hat{\xi}')} \right) \quad (34)$$

y

$$\hat{\hat{r}}(\hat{\chi}, \hat{\xi}) = \sqrt{|\hat{\chi} - \hat{\xi}|^2 + \frac{\phi^2(\hat{\xi}) + \phi^2(\hat{\chi})}{4}} \quad (35)$$

donde la inclusión de los diámetros  $\phi(\hat{\chi})$  y  $\phi(\hat{\xi})$  preserva automáticamente la simetría en el sistema de ecuaciones (22), aunque las secciones transversales del electrodo sean distintas en los puntos  $\hat{\chi}$  y  $\hat{\xi}$ .

La selección de diferentes tipos de funciones de prueba y test en (24) y (25) conduce a diferentes formulaciones específicas. Así, con elementos de densidad de corriente constante (un nodo centrado por segmento de conductor), la Colocación Puntual (deltas de Dirac como funciones de prueba) se identifica con los métodos intuitivos más antiguos, basados en la idea de sustituir cada segmento de conductor por una “esfera imaginaria”<sup>3</sup>. Por otra parte, la formulación de Galerkin (donde las funciones de test son las mismas que las de prueba) se identifica con una clase de métodos más recientes (tales como el “Método del Promediado del Potencial”)<sup>3</sup>, basados en la idea de que cada

segmento de conductor se sustituye por una "línea de fuentes puntuales de corriente sobre la longitud del conductor"<sup>6</sup> (elementos de densidad de corriente constante), y los coeficientes (24) corresponden a "resistencias mutuas y propias" entre "segmentos de conductor"<sup>4</sup>.

Los problemas encontrados con la aplicación de estos métodos se pueden explicar ahora, desde un punto de vista matemáticamente riguroso<sup>4,6</sup>. Con el fin de estudiar el efecto de las simplificaciones efectuadas en (30) y (33), se han realizado diferentes tests numéricos con un problema de prueba consistente en un único electrodo en un dominio infinito<sup>14</sup>. Este problema se ha resuelto mediante: 1) la formulación de elementos 1D de contorno presentada en este artículo, 2) una formulación estándar de elementos 2D de contorno para problemas de potencial axisimétricos (donde no se realiza ningún tipo de aproximaciones ni en el núcleo de la ecuación integral ni en las integrales circunferenciales) y 3) un programa específicamente desarrollado de elementos finitos 2D para problemas de potencial axisimétricos.

Los resultados de la formulación 1D concuerdan significativamente con los obtenidos con los otros dos métodos. Sin embargo, si se aumenta el grado de discretización, los resultados que se obtienen con esta técnica de elementos 1D de contorno oscilan alrededor de la solución real. Dado que la hipótesis de uniformidad circunferencial se satisface estrictamente en este ejemplo de prueba<sup>14</sup> y no se producen oscilaciones en la solución con la formulación estándar de elementos 2D de contorno ni con la de elementos finitos, el origen de estos problemas cabe buscarlos en las simplificaciones introducidas en la formulación numérica 1D.

El hecho es que la aproximación (30) no es válida para distancias pequeñas. Así, cuando se aumenta la discretización y el tamaño de los elementos llega a ser comparable al diámetro del conductor, la aproximación (33) introduce errores significativos en los coeficientes del sistema de ecuaciones (22) que corresponden a nodos adyacentes y especialmente en los términos diagonales.

Por otra parte, puesto que el error de la aproximación aumenta con el nivel de discretización, los resultados numéricos para discretizaciones finas no tienden a la solución de la ecuación integral (6) con el núcleo (5), sino a la solución de una ecuación integral distinta y mal condicionada (18) con el núcleo aproximado por (33)<sup>7,8</sup>.

Esto explica la razón por la que se obtienen resultados poco realistas cuando aumenta la discretización<sup>4</sup> y se impide la convergencia<sup>7</sup>. No obstante, se ha comprobado que los resultados obtenidos con niveles de discretización normales son suficientemente precisos en la práctica<sup>8,14</sup>.

En lo sucesivo, el modelo numérico y los ejemplos se restringirán a formulaciones de tipo Galerkin, donde la matriz del sistema (22) es simétrica y definida positiva<sup>15</sup>. Así, si se introducen las simplificaciones de las integrales circunferenciales (30) y (33) y se asume que el diámetro de los conductores es constante en cada elemento, las expresiones finales que permiten calcular los coeficientes del potencial (21) y del sistema de ecuaciones (24) resultan ser

$$\hat{V}_i^\alpha(\mathbf{x}) \approx \frac{\phi^\alpha}{4\gamma} \int_{\hat{\xi} \in L^\alpha} \hat{k}(\mathbf{x}, \hat{\xi}) \hat{N}_i(\hat{\xi}) dL \quad (36)$$

$$\hat{R}_{ji}^{\beta\alpha} \approx \frac{\pi\phi^\beta\phi^\alpha}{4\gamma} \int_{\hat{\mathbf{X}} \in L^\beta} \hat{N}_j(\hat{\mathbf{X}}) \left[ \int_{\hat{\mathbf{X}} \in L^\alpha} \hat{k}(\hat{\mathbf{X}}, \hat{\mathbf{X}}) \hat{N}_i(\hat{\mathbf{X}}) dL \right] dL \quad (37)$$

donde  $\phi^\alpha$  y  $\phi^\beta$  representan el diámetro del conductor (que se supone constante) en los elementos  $L^\alpha$  y  $L^\beta$ . Obviamente, las contribuciones (37) conducen a una matriz simétrica en (23).

El cálculo de las restantes integrales que intervienen en (36) y (37) no es obvio. Debido al mal comportamiento de las funciones de los integrandos no es posible emplear cuadraturas de Gauss, por lo que la mejor alternativa numérica parece ser una cuadratura de Simpson compuesta adaptativa (utilizando la extrapolación de Richardson como estimador de error)<sup>6</sup>. Sin embargo, debido al altísimo coste que ésta implica en el análisis de problemas reales, se ha optado por desarrollar una técnica que incorpore la integración analítica de todos los coeficientes.

De este modo, se han derivado fórmulas explícitas para calcular (36) en los casos de elementos de densidad de corriente constante (1 nodo funcional), lineal (2 nodos funcionales) y parabólico (3 nodos funcionales)<sup>7</sup>. Recientemente se han obtenido también expresiones explícitas para calcular las contribuciones (37). Para los casos más simples, estas expresiones se reducen a las fórmulas propuestas en otros métodos desarrollados en la literatura, como por ejemplo el Método del Promediado del Potencial, que corresponde al caso de utilizar elementos de densidad de corriente constante<sup>3</sup>.

La derivación de estas fórmulas explícitas no es obvia y requiere un importante y sistemático trabajo analítico<sup>7</sup>, que es excesivamente largo para desarrollarlo completamente en este artículo. Es importante resaltar que estas expresiones han sido obtenidas teniendo en cuenta su posterior implementación en un programa de ordenador, por lo que se han derivado de forma recurrente e involucrando el menor número posible de operaciones con funciones trascendentes. El desarrollo y deducción completa de estas fórmulas pueden encontrarse en trabajos previos de los autores<sup>8,21</sup>.

Este modelo numérico unidimensional simplificado, basado en el método de elementos de contorno con integración analítica de los coeficientes del sistema de ecuaciones es muy estructurado y está desarrollado de forma que sea posible incorporarlo eficazmente en un sistema de diseño asistido por ordenador. En todo caso, la implementación de la formulación debe realizarse con cierto cuidado, debido a la relativa complejidad de las expresiones que intervienen en el cálculo de coeficientes matriciales, a su casuística y en algunos casos a su mal condicionamiento.

### Coste computacional de la formulación de elementos 1D de contorno

El coste computacional global de esta formulación se puede analizar teniendo en cuenta que para una discretización dada, con  $m$  elementos de  $p$  nodos cada uno y un total de  $n$  grados de libertad, se debe generar y resolver el sistema de ecuaciones lineal (22) de dimensión  $n$ . La matriz de coeficientes es simétrica pero no vacía, por lo que su resolución mediante un método directo requiere  $O(n^3/3)$  operaciones. Por su parte, la generación de esta matriz requiere  $O(m^2p^2/2)$  operaciones, cada una de ellas equivalente a una integral doble, debido a las  $p^2$  contribuciones que se calculan mediante

la expresión (37) para cada par de elementos (considerando que aproximadamente la mitad se obtienen directamente por simetría).

En el caso de problemas pequeños/medianos el mayor esfuerzo computacional se invierte en la generación de la matriz, en tanto que la resolución del sistema de ecuaciones debería ser el factor predominante en problemas medianos/grandes. Sin embargo, a partir de un cierto tamaño del problema la utilización de un método directo para la solución del sistema de ecuaciones es prohibitiva, por lo que se preferirá una técnica iterativa o semiiterativa. En nuestro caso, los mejores resultados los ha proporcionado un algoritmo de gradientes conjugados con preconditionamiento diagonal ensamblando la matriz de coeficientes<sup>18</sup>, que se ha implementado finalmente en el sistema de diseño asistido de tomas de tierra desarrollado<sup>19</sup>. Esta técnica ha demostrado ser enormemente eficaz en este tipo de problemas y tiene un coste computacional relativamente bajo en comparación con el volumen de cálculo necesario para generar el sistema de ecuaciones. Por ello, el tamaño del problema más grande que es posible resolver en este momento en un entorno de computación normal, está limitado por la capacidad de memoria que requiere el almacenamiento y manipulación de la matriz de coeficientes. Así, para un problema de 2000 grados de libertad, se precisan ya aproximadamente 16Mb, mientras que los tiempos de generación de la matriz y resolución del sistema son todavía reducidos y del mismo orden de magnitud (del orden de minutos en una estación de trabajo considerada de gama media en 1996).

Por otra parte, una vez obtenida la densidad de corriente normal que emana de los electrodos, el coste de calcular la resistencia equivalente (2) es despreciable. El coste adicional asociado a la obtención del potencial en un punto dado (normalmente en la superficie del terreno) por medio de (20) y (36) requiere sólo  $O(mp)$  operaciones. No obstante, si es necesario calcular potenciales en un gran número de puntos (por ejemplo para el dibujo de isolíneas) el tiempo de computación puede ser considerable.

En cuanto a la elección del tipo de elemento en un problema determinado, para una discretización dada es evidente que la utilización de elementos de densidad de corriente constante proporcionará resultados menos precisos, aunque con un coste computacional menor, que la utilización de elementos de densidad de corriente lineal o parabólica. Obviamente, en comparación con los resultados obtenidos con una malla relativamente grosera de elementos de densidad de corriente constante, podremos aumentar la precisión o bien incrementando el número de elementos o utilizando elementos de mayor orden<sup>14</sup>. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que no es posible aumentar de forma indiscriminada el número de elementos dado que las aproximaciones (30) y (33) realizadas no son satisfactorias si el tamaño del elemento es del mismo orden de magnitud que el diámetro del electrodo cilíndrico, como se ha comentado anteriormente. En todo caso, para un problema dado, será necesario valorar cuidadosamente hasta qué punto es conveniente refinar la malla y en su caso aumentar el número de elementos (método  $h$ , en la terminología usual de Elementos Finitos) o utilizar elementos de mayor orden<sup>8</sup> (método  $p$ ).

## APLICACIÓN DE LA FORMULACIÓN A CASOS REALES

El primer ejemplo que presentamos es el sistema de puesta a tierra de la subestación E.R. Barberá de la empresa eléctrica Fecsa, cercana a la ciudad de Barcelona. El sistema de tomas de tierra de esta subestación está formada por 408 electrodos cilíndricos rectos de diámetro constante (12,85 mm) que constituye una malla paralela a la superficie del terreno enterrada a una profundidad de 80 cm, siendo la superficie total protegida de más de 6500 m<sup>2</sup>. El área total estudiada es un rectángulo de 135 m por 210 m, lo que supone una superficie de más de 28000 m<sup>2</sup>. La Sobretensión de Tierra considerada en este estudio es de 10 kV (dada la relación lineal existente entre la Sobretensión de Tierra  $V_T$  y la Intensidad Total de Tierra  $I_T$ , podemos indistintamente considerar una conocida y la otra incógnita, o viceversa). La disposición de los conductores de esta malla de tierra se presenta a escala en la Figura 2. La Tabla I resume las características generales de este sistema de puesta a tierra.

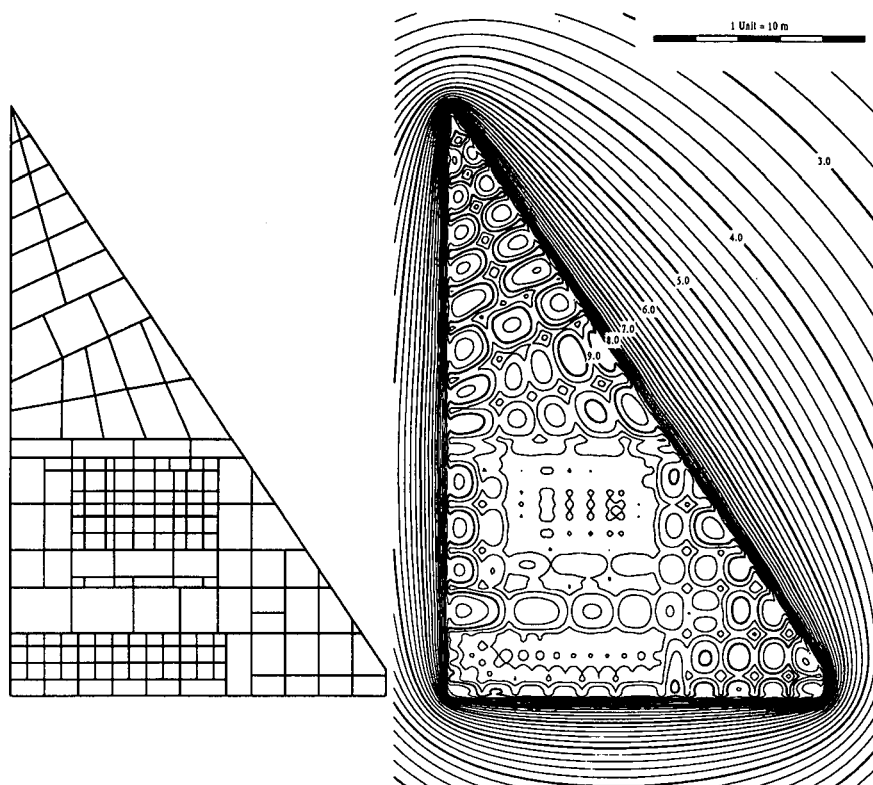


Figura 2. Subestación E.R. Barberá: Malla de electrodos y Distribución del potencial en la superficie del terreno (se han dibujado las líneas con incrementos de 0,2 kV y, en negrita, cada 1 kV)

SUBESTACIÓN E. R. BARBERÁ	
Dimensiones Máx. Malla:	145 m × 90 m
Profundidad Malla:	0,80 m
Número de Electrodo:	408
Diámetro Electrodo:	12,85 mm
Sobretensión de Tierra:	10 kV
Resistividad Terreno:	60 $\Omega$ m

Tabla I. Subestación E.R. Barberá: Características del sistema de toma de tierra

El modelo numérico empleado en este problema ha consistido en una formulación de Galerkin, en la que cada conductor se ha discretizado en un elemento de densidad de corriente lineal, lo cual implica un total de 238 grados de libertad†

En este ejemplo puede observarse cómo el uso de elementos de densidad de corriente lineales reduce significativamente el número total de grados de libertad del modelo. Así, con un coste computacional ligeramente superior en la generación de la matriz de coeficientes y un coste computacional inferior en la resolución del sistema de ecuaciones lineales, se obtienen resultados de gran precisión con un esfuerzo computacional total similar.

Los resultados numéricos se resumen en la Tabla II. Por otra parte, en la Figura 2 se muestra la distribución de potencial en la superficie del terreno en condiciones de fallo y en la Figura 3 se representan perfiles de potencial en la superficie del terreno a lo largo de diferentes líneas.

La resolución numérica de este modelo de toma de tierra ha requerido únicamente siete minutos y medio de tiempo de CPU en un ordenador personal convencional (tipo PC486/66MHz/16Mb).

SUBESTACIÓN E. R. BARBERÁ	
Tipo de Elemento:	Lineal
Número de Elementos:	408
Grados de Libertad:	238
Intensidad de Tierra:	31,8 kA
Resistencia Equivalente:	0,315 $\Omega$
Tiempo CPU:	450 s
Ordenador:	PC486/66MHz/16Mb

Tabla II. Subestación E.R. Barberá: Modelo Numérico y Resultados

† Es interesante notar que el uso de elementos de densidad de corriente constante por electrodo hubiera requerido, para este mismo ejemplo, un total de 408 grados de libertad.

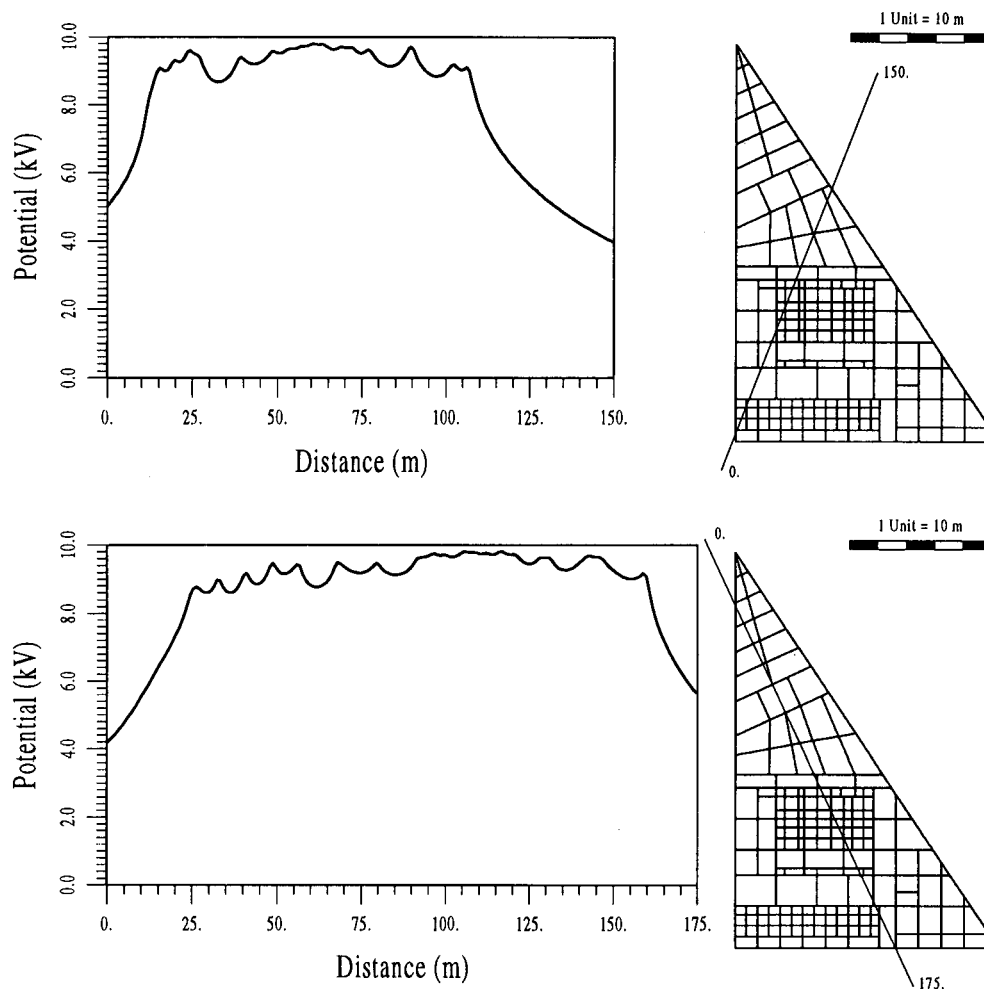


Figura 3. Subestación E.R. Barberá: Perfiles de potencial en la superficie del terreno a lo largo de diferentes líneas

El segundo ejemplo que se presenta es el sistema de puesta a tierra de la subestación Balaidos II de la empresa eléctrica Unión Fenosa, próxima a la ciudad de Vigo. La toma de tierra de esta instalación es una malla de 107 conductores cilíndricos (diámetro: 11,28 mm) enterrada a una profundidad de 80 cm y suplementada con 67 electrodos verticales (estas picas tienen una longitud de 2,5 m cada una y un diámetro de 14,0 mm). La superficie total protegida supera los 4800 m<sup>2</sup> y el área sometida a estudio es un rectángulo de 121 m por 108 m, lo que supone una superficie superior a los 13000 m<sup>2</sup>. Como en el ejemplo anterior, la Sobretensión de Tierra considerada en este estudio ha sido de 10 kV. En la Figura 4 se muestra la disposición en planta de la malla de toma de tierra de esta subestación, y en la Tabla III se resumen sus características principales.

El modelo numérico empleado en la resolución de este problema ha consistido en una formulación de Galerkin, en la que cada electrodo conductor se ha discretizado en

un elementos de densidad de corriente parabólica, lo que supone un total de 315 grados de libertad†

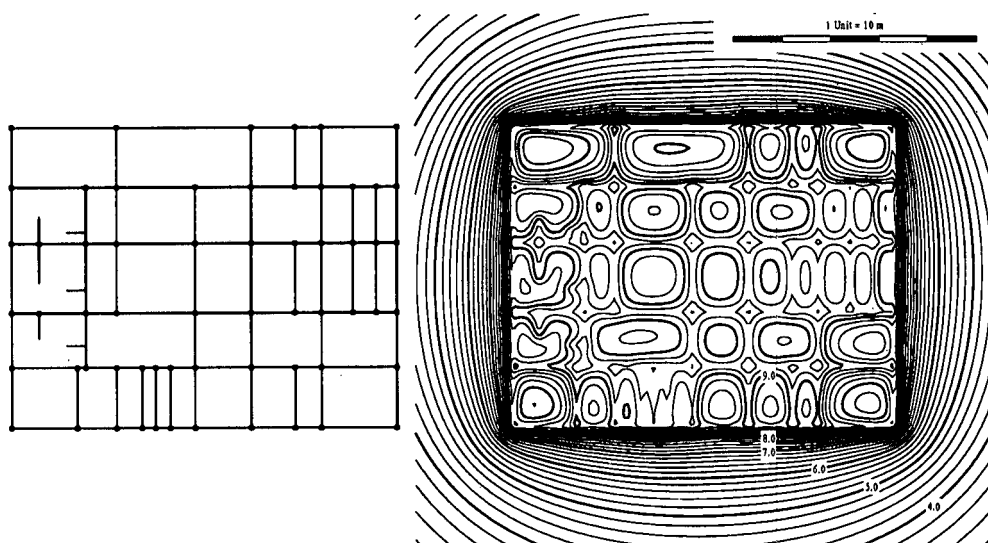


Figura 4. Subestación Balaidos II: Malla de electrodos (se indica con puntos negros la situación de los electrodos verticales) y Distribución del potencial en la superficie del terreno (se han dibujado las líneas con incrementos de 0,2 kV y, en negrita, cada 1 kV)

SUBESTACIÓN BALAIOS II	
Dimensiones Máx. Malla:	60 m × 80 m
Profundidad Malla:	0,0 m
Número de Electrodos Malla:	107
Número de Picas Verticales:	67
Diámetro Electrodos:	11,28 mm
Diámetro Picas:	14,00 mm
Sobretensión de Tierra:	10 kV
Resistividad Terreno:	60 $\Omega$ m

Tabla III. Subestación Balaidos II: Características del sistema de toma de tierra

† En este problema, el uso de elementos de densidad de corriente constante por electrodo supondría un total de 174 grados de libertad, en tanto que el uso de elementos de densidad de corriente lineal por conductor implicaría 141 grados de libertad.



Los resultados se presentan en la Tabla IV. Asimismo, la Figura 4 muestra la distribución del potencial en la superficie del terreno cuando tiene lugar una derivación de corriente a través de la toma de tierra.

La resolución numérica de este modelo ha requerido únicamente diez minutos de tiempo de CPU en un ordenador personal convencional (tipo PC486 /66MHz/16Mb).

SUBESTACIÓN BALAIOS II	
Tipo de Elemento:	Parabólico
Número de Elementos:	174
Grados de Libertad:	315
Intensidad de Tierra:	25 kA
Resistencia Equivalente:	0,4 $\Omega$
Tiempo CPU:	600 s
Ordenador:	PC486/66MHz/16Mb

Tabla IV. Subestación Balaidos II: Modelo Numérico y Resultados

Como puede verse en este ejemplo la utilización de elementos de densidad de corriente parabólica incrementa el número total de grados de libertad. Obviamente tanto el coste computacional de generación de la matriz de coeficientes como el de resolución del sistema de ecuaciones lineales se incrementan aunque, como se comprueba, el esfuerzo computacional total es aceptable (del mismo orden de magnitud) y la precisión en los resultados es mucho mayor.

Ambos ejemplos han sido resueltos repetidamente incrementando la segmentación de los electrodos. A la escala de toda la malla, los resultados y las distribuciones de potencial en la superficie no se modifican significativamente al aumentar la segmentación. Por ello, podemos concluir que, en general, una razonable (es decir, moderada) segmentación es suficiente en la práctica. El incremento del número de elementos más allá de este punto no será preciso, a menos que se requiera una elevada precisión en los resultados en una zona concreta de la malla de tierra. E incluso en este supuesto, la utilización de elementos de orden mayor será más ventajoso en general, que el incremento de la segmentación de los conductores, dado que la precisión será mayor para un número considerablemente menor de grados de libertad del modelo numérico<sup>8</sup>.

## CONCLUSIONES

En este artículo se ha presentado una formulación de elementos de contorno para el análisis de tomas de tierra de subestaciones eléctricas. En el caso de problemas tridimensionales, la introducción de una serie de hipótesis razonables permiten reducir la formulación general de Elementos de Contorno 2D a una formulación simplificada 1D con requerimientos computacionales aceptables. Algunos métodos intuitivos, ampliamente utilizados en la práctica, se han identificado como casos particulares de esta formulación simplificada para elecciones específicas de las funciones de prueba y de

test y así se han podido explicar y justificar, desde un punto de vista matemáticamente riguroso, los problemas encontrados en la aplicación de estos métodos. Por otra parte, la introducción de técnicas analíticas de integración en la formulación 1D simplificada ha hecho posible la reducción drástica de los requerimientos computacionales y el desarrollo de nuevas formulaciones más eficientes y precisas.

En la actualidad, estas técnicas desarrolladas por los autores han permitido la creación de un nuevo sistema de diseño asistido por ordenador de tomas de tierra para subestaciones eléctricas (TOTBEM)<sup>19</sup>. Con este sistema es posible analizar y calcular con gran precisión mallas de tomas de tierra de tamaño medio/grande, prácticamente en tiempo real y utilizando ordenadores convencionales de gran disponibilidad y bajo coste. Obviamente el estudio de instalaciones de puesta a tierra mayores requeriría un esfuerzo computacional mayor y probablemente un ordenador más potente, aunque el incremento del coste seguiría siendo aceptable.

### AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la empresa eléctrica Unión Fenosa, por la Universidade da Coruña y el gobierno autónomo de la Xunta de Galicia mediante Becas de Investigación y por la empresa eléctrica Fecsa mediante un Proyecto de Investigación.

### REFERENCIAS

1. ANSI/IEEE Std.80, "IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding", New York (1986).
2. J.G. Sverak, W.K. Dick, T.H. Dodds y R.H. Heppe, "Safe Substation Grounding. (Part I)", *IETPAS*, Vol. **100**, pp. 4281-4290 (1981).
3. R.J. Heppe, "Computation of Potential at Surface above an Energized Grid or Other Electrode, Allowing for Non-Uniform Current Distribution", *IETPAS*, Vol. **98**, pp. 1978-1988 (1979).
4. D.L. Garrett y J.G. Pruitt, "Problems Encountered with the Average Potential Method of Analyzing Substation Grounding Systems", *IETPAS*, Vol. **104**, pp. 3586-3596 (1985).
5. E. Durand, "*Électrostatique*", Masson Ed. Paris (1966).
6. L. Moreno, "Disseny assistit per ordinador de postes a terra en instal·lacions elèctriques", Tesina de Especialidad ETSECCPB, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, (1989).
7. F. Navarrina, I. Colominas y M. Casteleiro, "Analytical Integration Techniques for Earthing Grid Computation by Boundary Element Methods", *International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, Vol. **II**, pp. 1197-1206, Concepción, Chile (1992).
8. I. Colominas, "Cálculo y diseño por ordenador de tomas de tierra en instalaciones eléctricas: Una formulación numérica basada en el método integral de elementos de contorno", Ph.D. Thesis, E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad de La Coruña (1995).
9. E.D. Sunde, "*Earth Conduction Effects in Transmission Systems*", McMillan Ed., New York (1968).

10. R. Dautray y J.L. Lions, "Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques", Vol. **6**, Masson, Paris (1988).
11. M. Kurtovic y S. Vujevic, "Potential of Earthing Grid in Heterogeneous Soil", *IJNME*, Vol. **31**, pp. 677-688 (1991).
12. I. Stakgold, "*Green's Functions and Boundary Value Problems*", Wiley, New York (1979).
13. O.D. Kellog, "*Foundations of Potential Theory*", Springer Verlag, Berlín (1967).
14. I. Colominas, F. Navarrina y M. Casteleiro, "A Validation of the Boundary Element Method for Grounding Grid Design and Computation", *International Congress on Numerical Methods in Engineering and Applied Sciences*, Vol. **II**, pp. 1187-1196, Concepción, Chile (1992).
15. C. Johnson, "*Numerical Solution of Partial Differential Equations by the Finite Element Method*", Cambridge Univ. Press, Cambridge, USA (1987).
16. T.R.J. Hughes, "*The Finite Element Method*", Prentice Hall, New Jersey, USA (1987).
17. I. Colominas, F. Navarrina y M. Casteleiro M, "Fórmulas analíticas de integración para el cálculo de tomas de tierra mediante el método de los elementos de contorno (BEM)", *II Congreso de Métodos Numéricos en Ingeniería*, Vol. **II**, pp. 857-864, La Coruña (1993).
18. G. Pini y G. Gambolati, "Is a Simple Diagonal Scaling the best Preconditioner for Conjugate Gradients on Supercomputers ?" *Advances on Water Resources*, Vol. **13**, pp. 147-153 (1990).
19. M. Casteleiro, L.A. Hernández, I. Colominas y F. Navarrina, "Memoria y manual de usuario del sistema TOTBEM para cálculo y diseño asistido por ordenador de tomas de tierra de instalaciones eléctricas", E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad de La Coruña (1994).
20. I. Colominas, J. Aneiros, F. Navarrina y M. Casteleiro, "A Boundary Element Numerical Approach for Substation Grounding in a Two Layer Earth Structure", *Proceedings of the International Conference on Computational Engineering Science (ICES'97)*, San José, Costa Rica (1997).
21. I. Colominas, F. Navarrina y M. Casteleiro, "A Boundary Element Numerical Approach for Earthing Grid Computation", a publicar en *Computer Methods in Applied Mechanics in Engineering* (1997).